

Θεώρημα (Cayley ~ 1854): Κάθε ομάδα  $G$  είναι ισομορφή με μια υποομάδα μιας ομάδας μεταθέσεων

Απόδειξη: Θεωρούμε την ομάδα μεταθέσεων  $S(G)$  επί του συνόλου  $G = S(G) = \{ f: G \rightarrow G \mid f: 1-1 \text{ κι επί} \}$  με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων

Ορίζουμε μια απεικόνιση  $L: G \rightarrow S(G), g \mapsto L(g) \stackrel{\text{def}}{=} l_g: G \rightarrow G$   
 $l_g(x) = gx$

①  $\forall g \in G$  η απεικόνιση  $l_g$  είναι 1-1 κι επί δηλ  $l_g \in S(G)$

• Έστω  $l_g(x) = l_g(y) \Rightarrow gx = gy \xrightarrow{\text{Μότος Απορρίψης}} x = y$

Άρα, η  $l_g: 1-1 \forall g \in G$

$\forall y \in G$ , θα έχουμε: (Ζητάμε  $x \in G: l_g(x) = y \Rightarrow gx = y \Rightarrow$

$\Rightarrow x = g^{-1}y$ ). Τότε:  $l_g(g^{-1}y) = g(g^{-1}y) = (gg^{-1})y = ey = y$

Άρα η  $l_g$  επί  $\forall g \in G$

② Η απεικόνιση  $L$  είναι ομομορφισμός ομάδων

Πρέπει νδo:  $L(g_1, g_2) = L(g_1) \circ L(g_2) \Rightarrow l_{g_1} \circ l_{g_2}$

Θα έχουμε:  $l_{g_1} \circ l_{g_2}(x) = (l_{g_1} \circ l_{g_2})x = l_{g_1}(l_{g_2}x)$

$l_{g_1} \circ l_{g_2}(x) = l_{g_1}(l_{g_2}x) = l_{g_1}(g_2x) = g_1(g_2x)$  ⊖

Άρα,  $lg_1g_2(x) = (lg_1 \circ lg_2)(x) \quad \forall x \in G \Rightarrow lg_1g_2 = lg_1 \circ lg_2$

Οπότε η  $L$  είναι ομομορφισμός ομάδων

③ Πρέπει να δειχθεί ότι  $L$  είναι ομομορφισμός

$$\begin{aligned} \text{Ker } L &= \{g \in G \mid L(g) = \text{Id}_{S(G)}\} = \{g \in G \mid lg = \text{Id}_G\} = \\ &= \{g \in G \mid lg(x) = \text{Id}_G(x), \forall x \in G\} = \{g \in G \mid gx = x, \forall x \in G\} = \\ &= \{g \in G \mid g = \{e\}\} \Rightarrow \text{Άρα } L: \text{ομομορφισμός ομάδων} \end{aligned}$$

④ Το Θεώρημα Ισομορφισμών Ομάδων  $\Rightarrow G/\text{Ker}(L) \simeq \text{Im}(L)$

$\Rightarrow G \simeq \text{Im}(L)$  και γνωρίζουμε ότι  $\text{Im}(L) \leq S(G)$   
 $\text{Ker } L = \{e\}$

$\rightarrow$  Τι συμβαίνει όταν  $|G| < \infty$ ;

Αν  $A, B$  τυχόντα σύνολα  $\Rightarrow S(A) \simeq S(B) \Leftrightarrow |A| = |B|$

Έστω ότι  $|A| = |B|$ . Τότε  $\exists f: A \rightarrow B$  η οποία είναι 1-1 κι επί

Ορίστωμε απεικόνιση  $\Phi: S(A) \rightarrow S(B)$

$$\sigma \mapsto \Phi(\sigma) = f \circ \sigma \circ f^{-1}$$

①  $\forall \sigma \in S(A), \Phi(\sigma) \in S(B)$

②  $\Phi$ : ομομορφισμός

③  $\Phi$ : 1-1 κι επί

Απόδειξη: ①  $\forall \sigma \in S(A): \Phi(\sigma) = f \circ \sigma \circ f^{-1} \in S(B)$ , διότι οι  $f, \sigma, f^{-1}: 1-1$  κι επι

$$\textcircled{2} \forall \sigma, \tau \in S(A): \Phi(\sigma \circ \tau) = f \circ (\sigma \circ \tau) \circ f^{-1} = f \circ \sigma \circ \tau \circ f^{-1}$$

$$\Phi(\sigma) \circ \Phi(\tau) = (f \circ \sigma \circ f^{-1}) \circ (f \circ \tau \circ f^{-1}) = f \circ \sigma \circ f^{-1} \circ f \circ \tau \circ f^{-1} = f \circ \sigma \circ \tau \circ f^{-1} \quad \textcircled{=}$$

Άρα,  $\Phi(\sigma \circ \tau) = \Phi(\sigma) \circ \Phi(\tau)$  και η  $\Phi$  ομομορφισμός ομάδων

$$\textcircled{3} \text{ i) } \Phi(\sigma) = \Phi(\tau) \Rightarrow f \circ \sigma \circ f^{-1} = f \circ \tau \circ f^{-1} \Rightarrow \sigma \circ f^{-1} = \tau \circ f^{-1} \Rightarrow \sigma = \tau$$

$\Phi: 1-1$

ii) Έστω  $\rho \in S(B)$ . Ζητάμε  $\sigma \in S(A): \Phi(\sigma) = \rho$

$$\Rightarrow f \circ \sigma \circ f^{-1} = \rho \Rightarrow \sigma = f^{-1} \circ \rho \circ f$$

$$\text{Τότε: } \Phi(f^{-1} \circ \rho \circ f) = f \circ (f^{-1} \circ \rho \circ f) \circ f^{-1} = \rho. \text{ Άρα: } \underline{\Phi \text{ επι'}}$$

Συνεπώς,  $\Phi$ : ισομορφισμός ομάδων

$\leadsto$  Έστω  $G$ : ομάδα και  $|G| = n$ . Τότε:  $|G| = |\{1, 2, \dots, n\}| \Rightarrow$

$$\Rightarrow S(G) \simeq S(\{1, 2, \dots, n\}) = S_n$$

Άρα, το Θεώρημα Cayley:

Κάθε ομάδα  $G$  με τάξη ίση με  $n$  είναι ισομορφή με μια υποομάδα της  $S_n$

Παράδειγμα: Έστω  $G = \{e, a, b\}$  ομάδα τέταρτης τάξης  $|G| = 3$   
και τότε  $b = a^2$  και  $G = \langle a \rangle = \langle b \rangle$

Τότε αν' το Θ. Cayley υπάρχει ένας ισομορφισμός ομάδων  $L: G \rightarrow S_3$ , όπου  $L(g) = l_g: G \rightarrow G$  και ορίζεται:

$l_g(x) = gx$  και εικόνα  $\text{Im}(L) \cong G$

$$\bullet \text{Im}(L) = \{l_g \in S_3 \mid g \in G\} = \{l_e, l_a, l_b\}$$

$$\textcircled{1} l_e: \begin{cases} e \mapsto l_e(e) = ee = e \\ a \mapsto l_e(a) = ea = a \Rightarrow l_e = \text{Id}_G \\ b \mapsto l_e(b) = eb = b \end{cases}$$

$$\textcircled{2} l_a: \begin{cases} e \mapsto l_a(e) = ae = a \\ a \mapsto l_a(a) = aa = b \\ b \mapsto l_a(b) = ab = e \end{cases}$$

$$\textcircled{3} l_b: \begin{cases} e \mapsto l_b(e) = be = b \\ a \mapsto l_b(a) = ba = e \\ b \mapsto l_b(b) = bb = a \end{cases}$$

$$\text{Τότε: } l_e = \begin{pmatrix} e & a & b \\ e & a & b \end{pmatrix}, l_a = \begin{pmatrix} e & a & b \\ a & b & e \end{pmatrix}, l_b = \begin{pmatrix} e & a & b \\ b & e & a \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow i$   $\hookrightarrow p_1$   $\hookrightarrow p_2$

$$G \cong \text{Im}(L) = \{l_e, l_a, l_b\} \cong \{i, p_1, p_2\} = \langle p_1 \rangle$$

• Αν  $G$ : ομάδα, τότε η απεικόνιση  $L: G \rightarrow S(G)$

$$L(g) = l_g : G \rightarrow G, \quad l_g(x) = gx$$

είναι ισομορφισμός ομάδων ο οποίος καλείται η κανονική αριστερή αναπαράσταση της ομάδας  $G$ , κι επιπλέον  
 $G \cong \text{Im}(L) \leq S(G)$

→ Όταν ζητάμε την κανονική αριστερή αναπαράσταση της  $G$ ,  $|G|=n$ , τότε υπολογίζουμε τις μεταθέσεις του συνόλου  $\text{Im}(L)$ , περιγράφουμε τις μεταθέσεις  $l_g$ ,  $g \in G$  κι αφού αντιστοιχίσουμε τα στοιχεία του συνόλου  $G$  με τα στοιχεία  $\{1, 2, \dots, n\}$ , περιγράφουμε τις απεικονίσεις  $l_g$  ως στοιχεία της  $S_n$ .

$\{ \cdot R : G \rightarrow S(G), R(g) \stackrel{\varphi}{=} r_g : G \rightarrow G, r_g(x) = xg, \text{ κατά} \}$   
 $R(g_1 g_2) \neq R(g_1) \circ R(g_2), \text{ αλλά } R(g_1 g_2) = R(g_2) R(g_1)$  ορισμένη

Αν  $r_g(x) = xg^{-1}$ , τότε προκύπτει το ζητούμενο, όμοια με πριν.

Άσκηση: Θεωρούμε το σύνολο  $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in M_2(R) \mid xz \neq 0 \right\} \subseteq GL(2, R)$

①  $G \leq GL(2, R)$

②  $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(R) \mid y \in R \right\} \trianglelefteq G$

③ Να περιγραφεί η ομάδα  $G/H$

NO:

Date:

Λύση:  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in G, \text{ τότε: } \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb + y\gamma \\ 0 & z\gamma \end{pmatrix}$$

και  $xa z \gamma \neq 0$ , διότι  $xz \neq 0$ ,  $a\gamma \neq 0$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in G. \text{ Τότε } \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}' & -y\bar{x}'\bar{z}' \\ 0 & \bar{z}' \end{pmatrix} \in G$$

$$\text{Διότι } \bar{x}'\bar{z}' = \frac{1}{xz} \neq 0. \text{ Άρα, } \underline{G \leq GL(2, \mathbb{R})}$$

②, ③: Ορίσουμε ανεικόνιση  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \mapsto (x, z)$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}\right) = (x, z)$$

$$f\left[\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix} xa & xb + y\gamma \\ 0 & z\gamma \end{pmatrix} = (xa, z\gamma) = (x, z)(a, \gamma)$$

$$= f\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}\right) f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\right) \Rightarrow f: \text{φωτογραφισμός ομάδων}$$

NO:

Date:

$H$   $f$  είναι επιμορφισμός, διότι αν  $(k, l) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ , τότε  $H$

$$f \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} = (k, l)$$

$$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in G \mid f \left( \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \right) = e_{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in G \mid (x, z) = (1, 1) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \mid y \in \mathbb{R} \right\} = H$$

Άρα  $H \trianglelefteq G$ , διότι  $H = \text{Ker}(f)$  και οι πυρήνες ομομορφισμών είναι κανονικές υποομάδες.

Αν' το 1ο Θεωρ. Ισομορφισμών Ομάδων:

$$\bullet G / \text{Ker}(f) \simeq \text{Im}(f) \Rightarrow G/H \simeq \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$$

$$\rightarrow \text{Ορίζουμε απεικόνιση } g: H \rightarrow (\mathbb{R}, +), g \left( \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = y$$

$$g \left( \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = g \left( \begin{pmatrix} 1 & y' + y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = y' + y = y + y' =$$

$$= g \left( \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) + g \left( \begin{pmatrix} 1 & y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow g: \text{Ισομορφισμός Ομάδων}$$

$$g \left( \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e_H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Ker}(g) = \{e_H\} \Rightarrow g: \text{αντιστοίχιστος}$$

$$H \text{ g:eni, dioti } \forall y \in R : g \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = y$$

$$\text{Ara } g = \text{idomorfismos} \Rightarrow H \cong (R, +)$$

$$\rightarrow \text{Γενίκευση: } G = \left\{ \begin{pmatrix} x & a & b \\ 0 & y & \gamma \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \in M_3(R) \mid xyz \neq 0 \right\} \leq GL(3, R)$$

$$\bullet H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(R) \mid a, b, \gamma \in R \right\} \trianglelefteq G$$

$\rightarrow$  Έστω  $f: G_1 \rightarrow G_2$  ένας επιμορφισμός ομάδων

### • Θεώρημα Αντιστοιχίας Υποομάδων

Η απεικόνιση  $\Phi: \{ \text{Υποομάδες } H \text{ της } G_1, f \in \ker f \subseteq H \} \rightarrow$

$\rightarrow \{ \text{Υποομάδες } K \leq G_2 \}$

$H \mapsto \Phi(H) = f(H)$  είναι 1-1 και ενί  
και  $\Phi^{-1}(K) = f^{-1}(K)$

Απόδειξη: ① Έστω  $H \leq G_1$ . Τότε  $f(H) \leq G_2$ . Πράγματι

$e_2 \in f(H)$ , διότι  $e_1 \in H$  και  $f(e_1) = e_2$

Αν  $z, w \in f(H) \Rightarrow \exists x, y \in H : f(x) = z \left\{ \begin{array}{l} \text{Τότε } zw = f(x)f(y) = \\ f(y) = w \end{array} \right\} = f(xy) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \\ x, y \in H \Rightarrow xy \in H \end{array} \right.$

$\Rightarrow zw = f(xy) \in f(H)$

• Αν  $z \in f(H) \Rightarrow z = f(x)$ , για κάποιο  $x \in H$ , τότε:

$\left. \begin{array}{l} z^{-1} = f(x)^{-1} = f(x^{-1}) \\ x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H \end{array} \right\} \Rightarrow z^{-1} = f(x^{-1}) \in f(H)$ . Άρα  $f(H) \leq G_2$   
και η απεικόνιση  $\Phi(H) = f(H)$  είναι καθαρά  
ορισμένη.

② Θα δείξουμε ότι αν  $K \leq G_2$ , τότε  $f^{-1}(K) = \{x \in G_1 \mid f(x) \in K\} \leq G_1$  και  $\text{Ker}(f) \leq f^{-1}(K)$

$e_1 \in f^{-1}(K)$ , διότι  $K \leq G_2$

Αν  $x, y \in f^{-1}(K)$ , τότε  $f(x), f(y) \in K \Rightarrow f(x)f(y) \in K \Rightarrow$   
 $\left. \begin{array}{l} K \leq G_2 \\ \Rightarrow f(xy) \in K \end{array} \right\} \Rightarrow xy \in f^{-1}(K)$

Αν  $x \in f^{-1}(K) \Rightarrow f(x) \in K \Rightarrow f(x)^{-1} = f(x^{-1}) \in K \Rightarrow x^{-1} \in f^{-1}(K)$   
 $\left. \begin{array}{l} K \leq G_2 \end{array} \right\}$

Επειδή  $\{e_{G_2}\} \leq K \Rightarrow f^{-1}(\{e_{G_2}\}) \leq f^{-1}(K) \Rightarrow \text{Ker} f \leq f^{-1}(K)$

Με βάση τα παραπάνω, ορίζουμε απεικόνιση:

$\Psi: \{\text{Υποομάδες } K \text{ της } G\} \rightarrow \{\text{Υποομάδες } H \text{ της } G_2: \text{Ker} f \leq H\}$

$K \longmapsto \Psi(K) = f^{-1}(K)$

$$\textcircled{0} \text{ So: } \Phi = \Psi^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \forall H \subseteq G, \text{ Ker } f \subseteq H : H = f^{-1}(f(H)) \\ \text{b) } \forall K \subseteq G_2 : K = f(f^{-1}(K)) \end{array} \right.$$

$$\text{a) Έστω } h \in H. \text{ Τότε } f(h) \in f(H) \Rightarrow h \in f^{-1}(f(H))$$

$$\text{Άρα, } H \subseteq f^{-1}(f(H)) \quad \textcircled{1}$$

$$\text{Έστω } x \in f^{-1}(f(h)) \Rightarrow f(x) \in f(H) \Rightarrow f(x) = f(h), \text{ για } h \in H$$

$$\text{Τότε: } f(x)f(h)^{-1} = e_2 \Rightarrow f(xh^{-1}) = e_2 \Rightarrow xh^{-1} \in \text{Ker}(f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xh^{-1} = h', \text{ όπου } h' \in \text{Ker}(f) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = h'h \\ h' \in \text{Ker } f \subseteq H \\ h \in H \end{array} \right\} \Rightarrow x \in H$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(f(H)) \subseteq H \quad \textcircled{2}$$

$$\text{Ονότε, } \textcircled{1}, \textcircled{2} \Rightarrow H = f^{-1}(f(H))$$

$$\textcircled{b} \text{ Έστω } y \in f(f^{-1}(K)). \text{ Τότε } y = f(x), \text{ όπου } x \in f^{-1}(K)$$

$$f(x) = y \in K. \text{ Άρα: } f(f^{-1}(K)) \subseteq K \quad \textcircled{3}$$

$$\text{Έστω } K \subseteq K. \text{ Τότε επειδή } K \subseteq G_2 \text{ κι η } f \text{ είναι, έπεται:}$$

$$\exists x \in G_1 : f(x) = K. \text{ Τότε: } x \in f^{-1}(K) \Rightarrow K = f(x) \in f(f^{-1}(K))$$

$$\text{Άρα, } K \subseteq f(f^{-1}(K)) \quad \textcircled{4}$$

$$\text{Αντί, } \textcircled{3}, \textcircled{4} \Rightarrow K = f(f^{-1}(K))$$

NO:

Date:

Εφαρμογή: Έστω  $N \trianglelefteq G$ , κι έστω η αδόξα-νητικό  $G/N$ .

Ισχυρισμός:  $K \leq G/N \iff K = H/N$ ,  $H \leq G$   $\nexists$   $N \leq H$

Θεωρούμε τον επιμορφισμό ομάδων

$$\pi: G \rightarrow G/N, \pi(x) = xN$$

Γνωρίζουμε ότι  $\ker(\pi) = N$ . Αν'το Θ.Αντ. Υποομάδων

$$\{ \text{Υποομάδες } H \text{ της } G \mid N \leq H \} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \{ K \leq G/N \}$$

$$H \longmapsto \pi(H)$$

Άρα, για κάθε  $K \leq G/N$ , υπάρχει μοναδική υποομάδα  $H \leq G$   $\nexists$   $N \leq H$  έτσι ώστε:  $\pi(H) = K$

$$\text{Όπως } \pi(H) = \{ \pi(x) \in G/N \mid x \in H \} = \{ xN \in G/N \mid x \in H \} = H/N$$

Άσκηση: Ποιες οι υποομάδες της  $\mathbb{Z}_n$ ;

$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  και τότε οι υποομάδες της  $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  είναι της μορφής  $H/n\mathbb{Z}$ , όπου  $H \leq \mathbb{Z}$   $\nexists$   $n\mathbb{Z} \leq H$

Τότε ως γνωστόν  $H = m\mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  και:  $n\mathbb{Z} \leq m\mathbb{Z}$

Ιδιαίτερα:  $n \in m\mathbb{Z} \Rightarrow n = mk$ , για  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \mid n$

Άρα:  $K \leq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , τότε  $K = m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \mid n$ .

NO:

Date:

Άσκηση:  $H \trianglelefteq G_1$   $\nmid \in \text{Ker } f \in H$  (i) Ποια η σχέση  
 τότε  $f(H) \trianglelefteq G_2$  μεταξύ  $G_1/H, G_2/H$   
 $K \trianglelefteq G_2$ , τότε  $f^{-1}(K) \trianglelefteq G_1$  (ii) Ποια η σχέση σε  
 $G_1/f^{-1}(K)$  και  $G_2/K$